

E. FERRIGNO



**Contributo allo studio analitico delle prove  
di collisione contro barriera fissa**

Stabilimento Tipolitografico G. CANALE & C. - Via Tripoli 97/A - Torino

ESTRATTO DALLA RIVISTA ATA - SETTEMBRE 1973

# Contributo allo studio analitico delle prove di collisione contro barriera fissa

E. FERRIGNO (\*)

## 1. Premessa.

Il presente studio, che fa riferimento ad altra memoria dello scrivente pubblicata sulla rivista «Ingegneria Ferroviaria» [1], tende a dare un modesto contributo al problema dell'Auto Sicura, ponendo i fondamenti per una trattazione rigorosa dell'urto tra due corpi deformabili.

Dopo avere richiamato per sommi capi i principi ed i risultati di tale memoria, sarà pertanto sviluppato il tema dell'urto di un autoveicolo generico contro una barriera fissa, convalidando per via analitica alcuni grafici sperimentali comparsi su questa stessa rivista [2], [3].

Come è noto, lo studio degli urti viene di solito condotto applicando il solo principio della conservazione della quantità di moto, in quanto molto complesso si presenta il fenomeno della trasformazione dell'energia cinetica in lavoro di deformazione. È proprio seguendo questa strada dunque, attraverso alcune ipotesi semplificative, che riesce possibile aggiungere nuove condizioni analitiche al problema, pervenendo così a soluzioni soddisfacenti.

Si perviene pertanto, data la legge di variazione della accelerazione d'urto, alla determinazione di tutte le rimanenti grandezze, atte a definire il moto delle masse in collisione.

## 2. Fondamenti di calcolo.

Date due masse isolate  $m_1$  e  $m_2$  ciascuna procedente in direzione del proprio asse longitudinale di simmetria, siano  $V_1$  e  $V_2$  le rispettive velocità.

Nell'ipotesi che tali assi coincidano, come in fig. 1, si avrà il caso dell'urto frontale centrato.

Si assuma allora l'origine dei tempi  $t$  nell'istante in cui inizia il contatto e si considerino i due semiassi orientati  $x$  e  $y$  con origine rispettivamente in  $O_1$  e  $O_2$ , punti che consideriamo solidali alla sagoma della

singola massa, idealmente supposta indeformata durante l'urto, e che pertanto risultano svincolati dalle deformazioni ed in moto col sistema.

Tali semiassi sono per costruzione idonei a rappresentare i movimenti relativi della materia rispetto a ciascuna massa considerata.

Se poi si considerano i due semiassi orientati  $X$  e  $Y$ , con origine nel punto  $H$  dello spazio fisso, corrispondente alla posizione del punto di primo contatto (in pratica una superficie sufficientemente piccola), ognuno di tali riferimenti sarà idoneo allo studio dei movimenti assoluti  $X$  e  $Y$  delle due masse.

È evidente che nel caso pratico lo spazio considerato fisso si identificherà col suolo, mentre le due masse staranno a rappresentare due veicoli su strada.

A tal riguardo è appena il caso di avvertire che i risultati del calcolo sono riferibili al caso sopra definito soltanto nella misura in cui è possibile trascurare le forze che i veicoli si scambiano col suolo.

E ciò è lecito nella maggior parte dei casi, se si tiene conto dell'ordine di grandezza delle accelerazioni e decelerazioni, che caratterizzano gli urti di cui ci occupiamo, ordine variabile da 50 g a 100 g ed oltre, con g accelerazione di gravità.

In conseguenza, le forze d'urto saranno perciò rilevanti. Ciò posto, vogliamo studiare l'andamento nel tempo della collisione, dall'istante del contatto iniziale ( $t = 0$ ) all'istante ( $t = \tau$ ) in cui cessano le deformazioni  $x$  e  $y$  e, per conseguenza, si annulla la velocità relativa tra le masse considerate:

$$(1) \quad w = V_1 - V_2$$

Si determinerà pertanto la legge di variabilità delle deformazioni nel tempo:

$$(2) \quad x = x(t) \quad y = y(t)$$

e quindi quella di variabilità delle velocità con cui queste procedono  $x'$  e  $y'$ .

Parimenti sarà determinata la legge di variabilità nel tempo degli spazi percorsi:

$$(3) \quad X = X(t) \quad Y = Y(t)$$

e quella di variabilità delle velocità delle due masse  $X'$  e  $Y'$ .

(\*) Dr. ing. Edoardo Ferrigno - Capo Servizio Ferrotranvie presso la Direzione Compartimentale Motorizzazione Civile e TC di Cagliari.

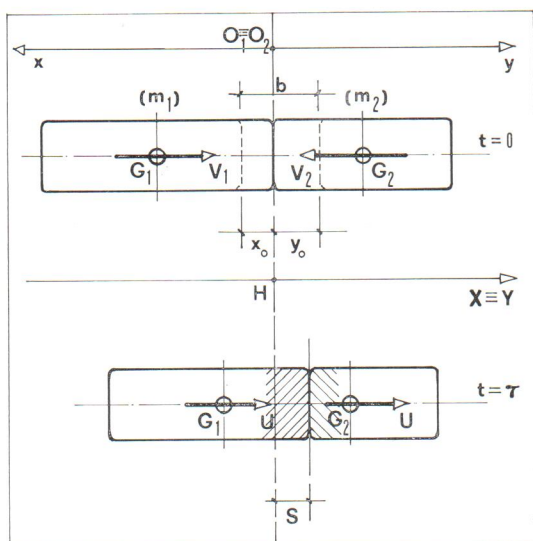


Fig. 1 - Schema fondamentale per lo studio dell'urto tra due masse.

Si ribadisce che l'indagine viene limitata all'intervallo di tempo  $(0, \tau)$ , che tra l'altro è di gran lunga il più importante ai fini che ci proponiamo. Inizieremo con lo scrivere il principio della conservazione della quantità di moto nella forma:

$$(4) \quad U = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

ove è  $U$  la velocità assunta da ciascuna massa nell'istante  $t = \tau$ , allorchè le due masse si trovano a procedere unite con velocità indifferenziata pari a  $U$ .

La (4), come è noto, esprime l'uguaglianza delle quantità di moto del sistema a quella complessiva, nel passaggio dall'istante  $t = 0$  a quello  $t = \tau$ .

Detto poi  $R$  il comune valore delle reazioni istantanee  $R_1$  e  $R_2$  che i due corpi in collisione si scambiano, reazioni agenti secondo la medesima retta di azione, ma di verso contrario, avremo dall'equazione fondamentale della dinamica:

$$(5) \quad \begin{cases} R_1 = m_1 X'' \\ R_2 = m_2 Y'' \end{cases}$$

ed anche:

$$(6) \quad \begin{cases} R_1 = m_1 \frac{d X'}{d x} x' \\ R_2 = m_2 \frac{d Y'}{d y} y' \end{cases}$$

Indicando con  $x_0$  e  $y_0$  rispettivamente la massima deformazione subita dalla massa  $m_1$  e dalla massa  $m_2$ , e facendo l'ipotesi verosimile che si possa scrivere:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d X'}{d x} \approx \frac{V_1 - U}{x_0} \\ \frac{d Y'}{d y} \approx \frac{V_2 - U}{y_0} \end{cases}$$

relazioni esprimenti la variazione lineare della velocità di ciascuna massa con la deformazione, con l'ausilio della (4) scriveremo anche:

$$(8) \quad \begin{cases} R_1 = M^* w \frac{x'}{x_0} \\ R_2 = M^* w \frac{y'}{y_0} \end{cases}$$

ove con  $M^*$  si è indicata una massa fittizia legata a  $m_1$  e  $m_2$  dalla relazione:

$$(9) \quad \frac{1}{M^*} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

analogo a quella relativa alla composizione di due resistenze elettriche in parallelo, ovvero alla composizione di due pesi elastici in parallelo nella teoria dell'elasticità della materia.

Dall'uguaglianza:

$$(10) \quad R = R_1 = R_2$$

si ha l'uguaglianza delle funzioni:

$$(11) \quad \varphi(t) = \frac{x'}{x_0} = \frac{y'}{y_0}$$

Diremo la funzione  $\varphi(t)$  « caratteristica della deformazione » e le (8) daranno luogo all'unica relazione fondamentale:

$$(12) \quad R(t) = M^* w \varphi(t)$$

Dalle (11) si ricavano le deformazioni:

$$(13) \quad \begin{cases} x(t) = x_0 \xi(t) \\ y(t) = y_0 \xi(t) \end{cases}$$

avendo introdotto l'altra funzione:

$$(14) \quad \xi(t) = \int_0^t \varphi(t) dt$$

che definisce la legge di variazione dei rapporti

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} \text{ rispetto al tempo.}$$

Con le notazioni ora introdotte, il sistema (7) assume la forma:

$$(15) \quad \begin{cases} X' = V_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} w \xi(t) \\ Y' = V_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} w \xi(t) \end{cases}$$

La funzione  $\xi(t)$  ha ovviamente significato nell'intervallo di tempo  $(0, \tau)$  ed assume in corrispondenza valori da 0 a 1. Se si vuole, essa rappresenta anche la variazione percentuale della deformazione di ciascuna massa.

Il sistema (15) fornisce poi per integrazione gli spazi percorsi da ogni singola massa nell'intervallo  $(0, \tau)$ ,  $X$  e  $Y$ .

Quanto a queste due funzioni, poichè ciascuna di esse rappresenta lo spazio percorso dal baricentro della massa, è chiaro che per  $t = \tau$  la differenza dei loro valori sarà:

$$(16) \quad X_\tau - Y_\tau = b$$

avendo posto:

$$(17) \quad x_0 + y_0 = b$$

Dalla fig. 1 si desume inoltre che la posizione nell'istante  $t = \tau$  della superficie di contatto tra i corpi è definita dal valore  $S$ , manifestamente dato da una qualunque delle relazioni:

$$(18) \quad \begin{cases} S = X_\tau - x_0 \\ S = Y_\tau - y_0 \end{cases}$$

Le relazioni ora scritte, per differenza, restituiscono puntualmente la (16).

### 3. Risoluzione del problema.

Per giungere alla risoluzione del problema propostoci è necessario definire la funzione  $\varphi(t)$ , il cui ruolo è basilare nel calcolo impostato al paragrafo precedente.

Una prima condizione che tale funzione deve verificare per definizione è la seguente:

$$(19) \quad \int_0^\tau \varphi(t) dt = 1$$

immediatamente desumibile da una qualunque delle (13).

Un'altra condizione cui deve soddisfare la  $\varphi(t)$  può essere ricavata uguagliando il lavoro di deformazione, compiuto dalla reazione mutua  $R$  su ciascuna massa, alla variazione di energia cinetica del sistema nell'intervallo  $(0, \tau)$ .

Scriveremo tale variazione nella forma:

$$(20) \quad \xi = \frac{1}{2} (m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) U^2$$

e, dopo gli opportuni sviluppi, otterremo:

$$(21) \quad \xi = \frac{1}{2} M^* w^2$$

col noto significato dei simboli.

D'altra parte il lavoro di deformazione compiutosi nello stesso intervallo di tempo può esprimersi:

$$(22) \quad \xi = \int_0^{x_0} R dx + \int_0^{y_0} R dy$$

e pertanto, tenendo conto dell'espressione di  $R$  data dalla (12) nonché differenziando le (13), si perviene all'altra importante relazione:

$$(23) \quad \int_0^\tau \varphi^2(t) dt = \frac{w}{2b}$$

La (19) e la (23), insieme alla (17), costituiscono un sistema di tre equazioni in grado, come vedremo, di definire perfettamente la caratteristica  $\varphi(t)$  ed il tempo di durata del contatto  $\tau$ , noti  $w$  e  $b$ .

Notisi che l'espressione (21) rimane identica in tutta la gamma di casi in cui sia verificata la (1) e, al limite, nel caso che una delle masse risulti immobile prima dell'urto.

Ciò in quanto essa rappresenta la variazione di energia cinetica del sistema nel suo complesso.

Compiutasi la fase di deformazione, detta energia risulta interamente trasformata in lavoro di deformazione e, come tale, distribuita tra le due masse in ragione degli accorciamenti  $x_0$  e  $y_0$ .

Inoltre, date le caratteristiche meccaniche dei due corpi ed a parità di  $w$ , rimangono costanti sia le deformazioni  $x_0$  e  $y_0$  che la reazione  $R$  ed il tempo  $\tau$ , comunque vari la coppia di valori  $V_1$  e  $V_2$ .

Basta che vari la caratteristica meccanica di uno solo dei due corpi considerati, sempre a parità di  $w$ , perchè anche le deformazioni cambino, e quindi la reazione  $R$  ed il tempo  $\tau$ .

Ancora in sintesi, la ripartizione dell'energia in ragione direttamente proporzionale alle deformazioni è valida solo in termini di lavoro di deformazione ad urto concluso, non in termini di energia a monte dell'urto.

Sempre nella prospettiva di estendere al caso pratico di vetture in collisione i risultati sopra esposti, va chiarito il significato di  $x$  e  $y$  e quello dell'istante iniziale dell'urto  $t = 0$ .

L'origine dei tempi, e di conseguenza l'inizio delle deformazioni, va inteso come quell'istante in cui ciascun veicolo comincia a risentire in modo non trascurabile dell'azione dinamica da parte dell'altro. In altri termini, le deformazioni  $x$  e  $y$  sono quelle effettivamente « responsabili » di interazioni tra i veicoli in collisione; saranno perciò da trascurare quelle deformazioni a carico di sporgenze poco significative agli effetti dell'urto, e ciò al fine di non falsare i risultati del calcolo, di per sè rigoroso.

### 4. Significato della caratteristica di deformazione.

Allo scopo di stabilire un collegamento pratico tra la funzione  $\varphi(t)$  e le prove di collisione, osserviamo che, derivando le (15), si ottiene:

$$(24) \quad \begin{cases} X'' = -K_2 \varphi(t) \\ Y'' = -K_1 \varphi(t) \end{cases}$$

avendo posto:

$$K_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} w \quad K_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} w$$

Le (24) esprimono che le accelerazioni, positive o negative, subite dai due corpi considerati sono proporzionali alla caratteristica  $\varphi(t)$  mediante una costante che, per ciascuno dei due corpi, contiene al numeratore il prodotto della velocità relativa  $w$  per la massa del corpo antagonista e al denominatore la somma delle masse.

Riepilogando, si può assegnare alla caratteristica  $\varphi(t)$ , oltre al significato ovvio di velocità della deformazione, quello di una grandezza fisica proporzionale all'accelerazione, positiva o negativa, del corpo che si considera, ma di segno contrario.

### 5. Esempi pratici.

Svilupperemo due casi particolarmente semplici, al fine di convalidare la rapidità e linearità del metodo, specie se si operano alcune semplificazioni del tutto lecite.

Nell'ipotesi che le accelerazioni si mantengano costanti durante l'intervallo di tempo considerato, si avrà per  $\varphi$  una espressione del tipo:

$$(25) \quad \varphi(t) = A$$

e, con solo uso delle (19) e (23), si perviene ai valori:

$$(26) \quad \begin{cases} A = \frac{w}{2b} \\ \tau = \frac{2b}{w} \end{cases}$$

che permettono di determinare perfettamente la reazione  $R$  data dalla (12), la funzione  $\xi(t)$  data dalla (14) e quindi le funzioni rappresentanti le deformazioni  $x$  e  $y$  date dalle (13), le velocità delle due masse  $X'$  e  $Y'$  date dalle (15) e, di conseguenza, le accelerazioni  $X''$  e  $Y''$  e gli spazi percorsi  $X$  e  $Y$ , rispettivamente per derivazione ed integrazione delle velocità suddette.

Quanto alle accelerazioni, è comodo riferirsi ai rapporti  $X''/g$  e  $Y''/g$ . Si deve osservare che, avendo risolto il problema senza l'ausilio della (16), la caratteristica (25), mentre è perfettamente idonea a farci studiare i fenomeni dinamici dell'urto, non è tale agli effetti degli spostamenti delle masse rispetto allo spazio fisso.

In pratica però tale ultima circostanza non riveste molta importanza, anche perchè le differenze riscontrabili sono del tutto trascurabili.

Vogliamo cogliere l'occasione per mostrare come la soluzione (26) sia in armonia con le ipotesi fatte. Invero, essendo costante l'accelerazione, positiva o negativa, la velocità relativa  $w$  varierà linearmente col tempo ed il suo valore medio sarà:

$$w_m = \frac{2b}{\tau}$$

relazione che restituisce la seconda delle (26).

Un altro caso semplice può configurarsi in corrispondenza della caratteristica:

$$(27) \quad \varphi(t) = A - Bt$$

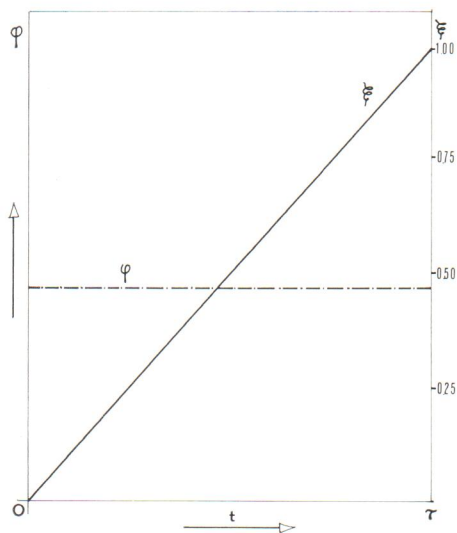


Fig. 2 - Grafico della caratteristica della deformazione  $\varphi$  e della funzione  $\xi$ , nel caso di  $\varphi$  costante.

che corrisponde all'ipotesi di accelerazione decrescente linearmente col tempo.

Anche in questo caso, senza pretendere la verifica della (16), si imporranno le condizioni (19) e (23) ed inoltre, non essendo esse sufficienti, si imporrà anche la condizione  $\varphi(\tau) = 0$ , che appare indispensabile. Avremo dunque, a calcoli fatti, il sistema:

$$(28) \quad \begin{cases} A = \frac{3}{4} \frac{w}{b} \\ B = \frac{9}{32} \left( \frac{w}{b} \right)^2 \\ \tau = \frac{8}{3} \frac{b}{w} \end{cases}$$

in base al quale potremo determinare tutte le funzioni elencate per il caso precedente.

Nella fig. 2 e nella fig. 3 sono indicati gli andamenti delle funzioni  $\varphi(t)$  e  $\xi(t)$  per i due casi trattati.

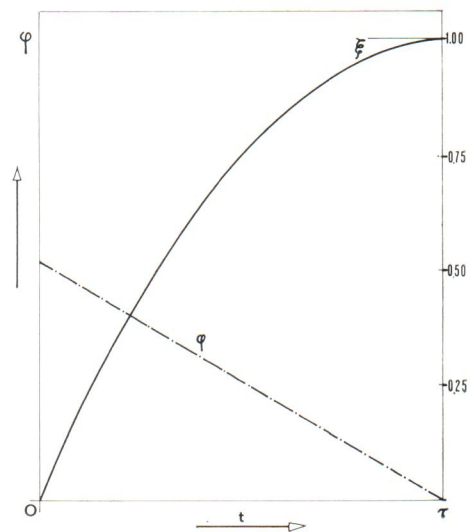


Fig. 3 - Grafico della caratteristica della deformazione  $\varphi$  e della funzione  $\xi$ , nel caso di  $\varphi$  linearmente decrescente.

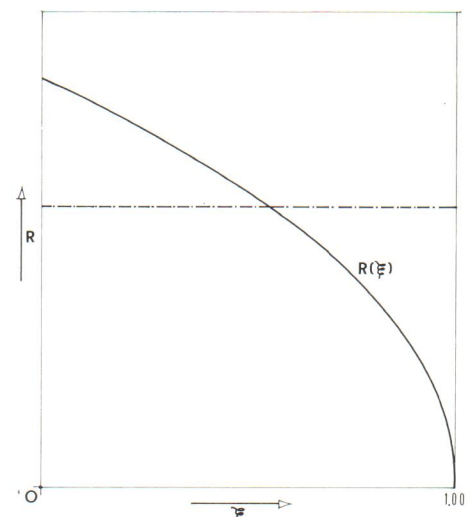


Fig. 4 - Grafico della reazione mutua d'urto  $R$ , in funzione di  $\xi$ .

Con riferimento ai dati numerici ricavati da un caso pratico, abbiamo riportato in fig. 4 l'andamento della reazione mutua  $R$ , relativamente ai due casi trattati, in funzione di  $\xi$ .

Per quanto riguarda il secondo caso, è stato necessario esprimere  $R$  in funzione di  $\xi$ , eliminando il parametro  $t$  tra la (12) e la (14).

Nella fig. 5 sono state rappresentate le velocità  $X'$  e  $Y'$  per i due casi in esame.

È evidente la convergenza delle due curve al valore costante  $U$  a fine urto (punto  $Q$ ) ed è interessante rilevare l'inversione della velocità della massa  $m_2$  ad un certo punto dell'intervallo  $(0, \tau)$ .

Si nota che, mentre nel caso di accelerazione costante detta inversione si verifica a  $\approx 1/2 \tau$ , nel secondo essa avviene per un valore intorno a  $1/3 \tau$ .

Va anche notato che le aree sottese, per ciascuno dei due casi, dai diagrammi  $X'$  e  $Y'$  non sono uguali, essendo tale differenza non nulla e pari a  $b$  in virtù della (16).

I dati numerici di riferimento sono i seguenti, ricavati, come detto, da un caso pratico di collisione tra autovetture:

$$\begin{aligned} m_1 &= 153 \text{ kg s}^2/\text{m} \\ m_2 &= 92 \text{ kg s}^2/\text{m} \\ V_1 &= 100 \text{ km/h} \\ V_2 &= -70 \text{ km/h} \\ x_0 &= 0,70 \text{ m} \\ y_0 &= 0,30 \text{ m} \end{aligned}$$

## 6. Caso dell'urto frontale contro barriera fissa.

Come dichiarato in premessa, vogliamo applicare il metodo svolto al caso di urto frontale di un veicolo contro barriera fissa, allo scopo di verificare col rigore dell'analisi alcuni risultati dell'esperienza.

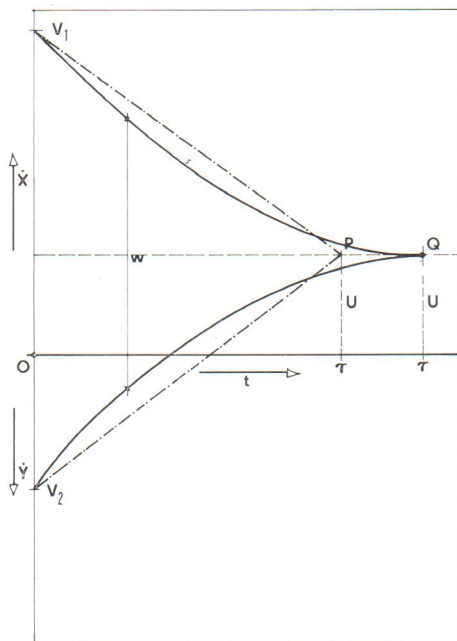


Fig. 5 - Andamento delle velocità  $X'$  e  $Y'$  in funzione del tempo, con riferimento al sistema fisso.

Ci riferiremo pertanto alla fig. 6, che riproduce un grafico pubblicato su ATA nell'articolo di cui alla nota [2], precisamente la fig. 3 di tale elaborato, ed assegneremo al diagramma  $-X''/g$  una legge di variazione appropriata, tale da mantenere il diagramma teorico molto vicino a quello reale.

Poniamo dunque:

$$(29) \quad X'' = -A \sin \pi \frac{t}{2\tau_0}$$

avendo indicato con  $\tau_0$  la metà del tempo d'urto  $\tau$ , corrispondente nel diagramma sperimentale a  $\approx 100$  ms, con  $A$  una costante da determinare. Una tale variazione, come si evince dalla stessa fig. 6, riproduce soddisfacentemente l'andamento della accelerazione effettiva durante l'urto.

La forma del diagramma prescelto è peraltro corrispondente all'andamento dei grafici sperimentali riportati a pag. 473 della memoria citata in bibliografia alla nota [3].

Nella fig. 7 è rappresentato l'urto di un autoveicolo contro barriera e ad essa ci riferiremo nel calcolo che segue.

Come ivi indicato, identificheremo l'autoveicolo con la massa  $m_1$  e la barriera con la massa  $m_2$  che è infinita. Inoltre, supponendosi la barriera indeformabile, e fissa, sarà pure  $x_0 = b$ , come conseguenza della  $y_0 = 0$  e  $V_2 = 0$ .

Risulterà poi evidentemente:

$$w = V_1$$

Dalla prima delle (24), risultando manifestamente:

$$K_2 = w$$

per  $m_2$  tendente all'infinito, avremo:

$$(30) \quad \varphi = -\frac{1}{w} X''$$

che definisce la caratteristica  $\varphi$  col ricorso alla (29), e cioè:

$$(31) \quad \varphi(t) = \frac{A}{w} \sin \alpha t$$

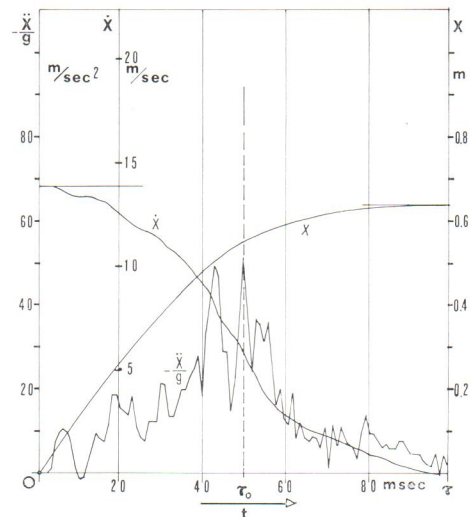


Fig. 6 - Grafici relativi all'urto contro barriera fissa alla velocità di 13,83 m/s, tratto dallo studio citato alla nota [2] di bibliografia.

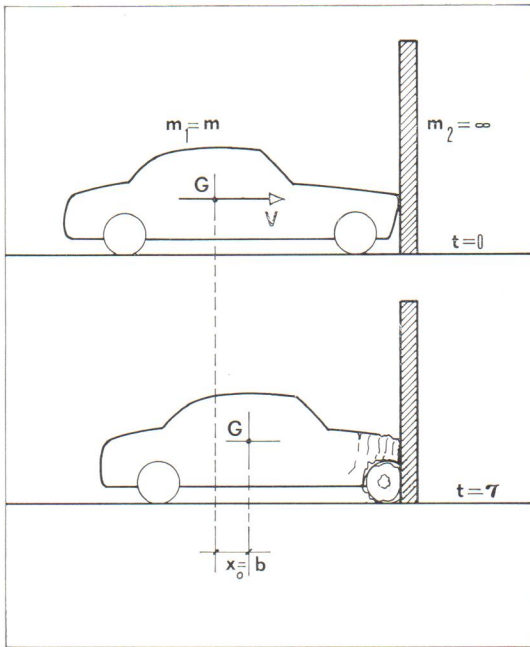


Fig. 7 - Schema derivato dalla fig. 1 per l'applicazione al caso di urto contro barriera fissa.

con la posizione:

$$\alpha = \frac{1}{2\tau_0}$$

Dalla (30) consegue, in armonia con l'ipotesi di premessa, (24), la interessante relazione:

$$\frac{X''}{x'} = -\frac{w}{b}$$

che permette di costruire il grafico  $x'$ , noto quello  $X''$ . Ciò posto, è immediato ricavare dall'insieme delle condizioni (19) e (23) il sistema risolutore, che fornisce per le due incognite:

$$(32) \quad \begin{cases} \tau = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{b}{w} \\ A = \frac{2}{\pi} \frac{w^2}{b} \end{cases}$$

e, con  $b \approx 0,65$  m e  $w \approx 13,83$  m/s, risulterà:

$$(33) \quad \begin{cases} \tau \approx 0,116 \text{ s} \\ A \approx 187 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Essendo la  $\varphi$  ora perfettamente determinata, attraverso le (11) si ottiene:

$$(34) \quad x' = \frac{A}{w} b \sin \alpha t$$

il cui valore massimo è  $\frac{2}{\pi} w$  corrispondente a  $t = \tau_0$ , ed attraverso le (13):

$$(35) \quad x = \frac{1}{2} b (1 - \cos \alpha t)$$

Le relazioni ora scritte determinano rispettivamente la velocità di deformazione, che varia come la  $X''$ , e l'entità della deformazione stessa. Entrambe le funzioni sono rappresentate nella fig. 8. Inoltre, dalle (15) avremo la velocità del punto  $G_1$ , baricentro del veicolo:

$$(36) \quad X' = \frac{1}{2} w (\cos \alpha t + 1)$$

e per integrazione della precedente:

$$(37) \quad X = \frac{1}{2} w \left( \frac{1}{\alpha} \sin \alpha t + t \right)$$

Come accennato nella parte generale, la (37) può fornire valori soltanto approssimati degli spazi percorsi, in quanto la  $\varphi$  è stata determinata prescindendo dalla condizione (16).

Volendo indagare sull'ordine di grandezza dell'errore, calcoleremo  $X$  per  $t = \tau$ . Otterremo:

$$X_\tau = \frac{\pi^2}{8} b \approx 1,23 b$$

valore del tutto accettabile in quanto molto prossimo a  $b$ .

Le funzioni  $X'$  e  $X$  sono rappresentate nella fig. 9, nella quale è possibile paragonare le curve teoriche a quelle sperimentali di fig. 6.

Risultati ancora più soddisfacenti si possono ottenere adottando, in sostituzione della curva sperimentale, la:

$$(38) \quad X'' = -A \sqrt{t}$$

da 0 a  $\tau_0$  e considerando un diagramma simmetrico da  $\tau_0$  a  $\tau$ . In tal caso le condizioni (19) e (23) possono riferirsi all'intervallo  $(0, \tau_0)$ , con l'avvertenza di dimezzare i secondi membri.

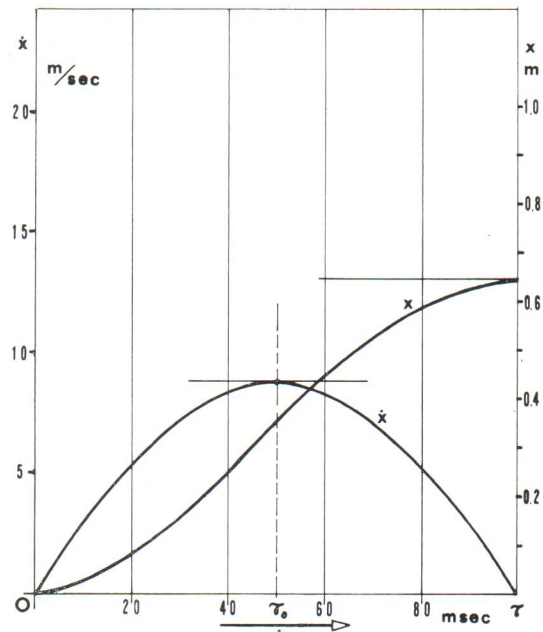


Fig. 8 - Andamento delle velocità  $x'$  e degli spazi percorsi  $x$ , rispetto al sistema mobile.

Si ottiene in definitiva:

$$(39) \quad \varphi = \frac{A}{w} \sqrt{t}$$

e:

$$(40) \quad \begin{cases} \tau = \frac{9}{4} \frac{b}{w} \\ A = \frac{8}{9} \sqrt{\frac{w^5}{2b^3}} \end{cases}$$

Si ha poi facilmente:

$$(41) \quad \begin{cases} \tau \approx 0,106 \text{ s} \\ A \approx 870 \text{ m/s}^{5/2} \end{cases}$$

e la velocità di deformazione:

$$(42) \quad x' = \frac{A}{w} b \sqrt{t}$$

La deformazione è poi data in valore da:

$$(43) \quad x = \frac{2}{3} \frac{A}{w} b \sqrt{t^3}$$

Per quanto riguarda poi gli elementi cinematici del baricentro  $G_1$ , avremo poi:

$$(44) \quad X' = w - \frac{2}{3} A \sqrt{t^3}$$

e

$$(45) \quad X = w t - \frac{4}{15} A \sqrt{t^5}$$

Quest'ultima formula, approssimata per i motivi già chiariti in precedenza, fornisce per  $t = \tau$ :

$$(46) \quad X_\tau = \frac{11}{10} b$$

che risulta più vicina alla realtà in quanto fornisce valori di  $X$  ancora più prossimi a  $b$ .

## 6. Osservazioni conclusive.

Il metodo analitico considerato nel presente studio ci ha consentito di seguire con abbastanza approssimazione il fenomeno della collisione di un veicolo contro una barriera fissa, in direzione ortogonale alla medesima, ed è quanto ci eravamo proposti di fare nelle premesse.

Si è cioè convalidato, al calibro delle risultanze sperimentali più recenti, un procedimento analitico già esposto in altra occasione [1], procedimento che, oltre a costituire un fondamento teorico valido nel campo assai complesso delle prove d'urto, si presta altresì alla risoluzione di problemi nei quali alcune grandezze tra quelle considerate risultino incognite o non facilmente misurabili.

Va appena aggiunto che il metodo stesso presuppone soltanto la non eccentricità dell'urto, e pertanto, prese le opportune cautele, esso può estendersi a tutti i casi d'urto, assegnando alle velocità il relativo segno.

## Bibliografia

- [1] E. Ferrigno - Analisi dell'urto centrato tra due corpi deformabili in movimento: applicazione al caso di collisione tra due veicoli. - Ingegneria Ferroviaria - Marzo 1971.
- [2] G. Barnato - Urto frontale - Influenza sugli indici di severità della legge di decelerazione agli attacchi delle cinture di sicurezza - ATA - Agosto 1972.
- [3] Presentazione tecnica Fiat alla 3ª Conferenza Tecnica Internazionale sulla Vettura Sperimentale Sicura. - Washington, 30 Maggio-2 Giugno 1972 - ATA - Settembre 1972.

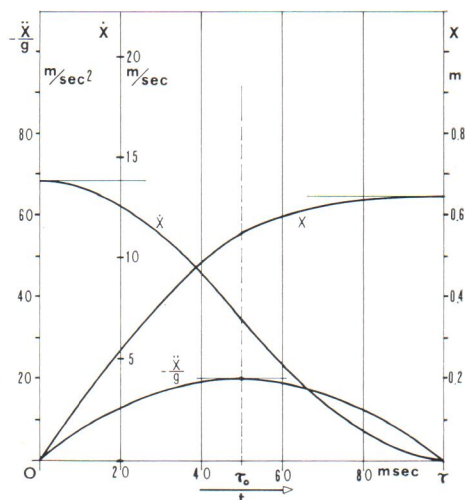


Fig. 9 - Grafico di cui alla fig. 6, ricavato per via teorica.